



Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- Određivanje najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji naziva se *minimizacijom*
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem promjenljivih pogodno je izvršiti preko **Karnoovih mapa**
- Karnoova mapa za funkciju sa n promjenljivih se sastoji od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Svakoj elementarnoj površini (polju) odgovara jedan **potpuni logički proizvod** (minterm), odnosno **potpuni logički zbir** (maksterm), tj. jedan indeks
- Za funkciju 4 promjenljive:
 - Svaka promjenljiva ima svoj značaj
 - X_1 najveći, X_4 najmanji

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirava), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirava), u mapi pokriti površinama koje obuhvataju tzv. susjedna polja
- Susjedna polja su ona polja čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n , gdje $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina mora biti što je moguće manji;
 - zaokruživanje se **počinje** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f :

		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

- U obliku zbira potpunih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem poslednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for function f. The map has variables x, y, z, and p. The rows are labeled xy (00, 01, 11, 10) and the columns are labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=1, (01,01)=0, (01,11)=1, (01,10)=0; (11,00)=1, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=0, (10,11)=0, (10,10)=0. A dashed circle labeled '1' encloses the first column (z=0). A dashed circle labeled '2' encloses the cells (01,11), (11,11), and (10,11) (y=1, z=1).

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for function f. The map has variables x, y, z, and p. The rows are labeled xy (00, 01, 11, 10) and the columns are labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=1, (01,10)=1; (11,00)=0, (11,01)=1, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=1, (10,11)=1, (10,10)=0. A dashed circle labeled '1' encloses the first column (z=0). A dashed circle labeled '2' encloses the cells (01,11), (11,11), and (10,11) (y=1, z=1).

$$f = p + yz$$

■ Karnoove mape sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

		Y	
	X	/	
		0	1
0		$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1		$X\bar{Y}$	XY

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

		Y	
	X	/	
		0	1
0			
1			1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

		Y	
	X	/	
		0	1
0			1
1		1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

- *Rješenje:* Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

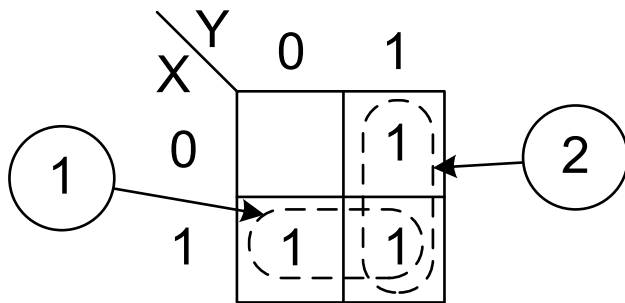
1. **Algebarski:**

$$F = \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y.$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova** (makstermova):

$$F = \prod M(0) = X + Y.$$

3. **Upotrebom Karnoove mape:**



$$F = X + Y$$

■ Karnoove mape sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ) + (X\bar{Y}Z + XYZ) = \\ &= \bar{X}Z(\bar{Y} + Y) + XZ(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Z + XZ = Z \end{aligned}$$

■ Karnoove mape sa četiri promjenljive

■ Četiri promjenljive - šesnaest mintermova

■ *Primjer:* Odrediti minimalnu formu funkcije:

$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}.$$

■ *Rješenje:*

$$\begin{aligned} f(D, C, B, A) &= (D+\bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A+\bar{A}) + (D+\bar{D})CB\bar{A} = \\ &= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15). \end{aligned}$$

DC \ BA		BA			
		00	01	11	10
00	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
11	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Diagram showing the Karnaugh map with groupings:

- Group 1 (circled 1): A 2x2 square of 1s in the bottom-left corner (cells 8, 9, 10, 11).
- Group 2 (circled 2): A 2x2 square of 1s in the middle-right section (cells 7, 6, 15, 14).

		BA			
		00	01	11	10
DC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7 1	6 1
	11	12	13	15 1	14 1
	10	8 1	9 1	11	10

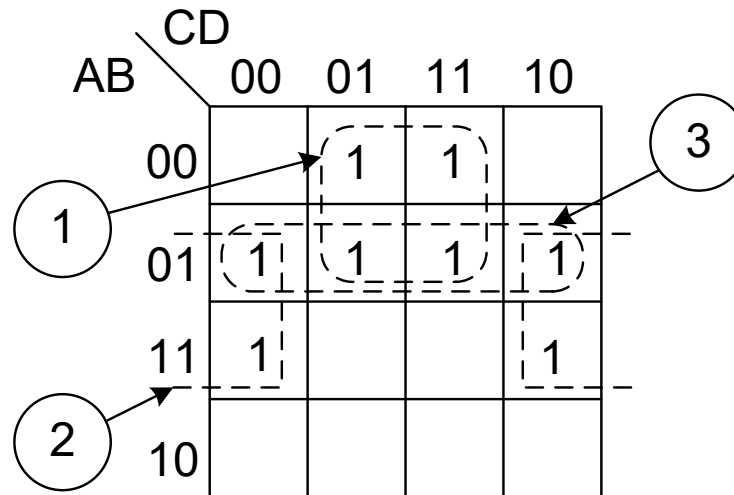
Diagram annotations: A circle labeled '1' points to the 1s in the bottom row (minterms 8, 9). A circle labeled '2' points to the 1s in the second row (minterms 6, 7).

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} m_{6,7,14,15} &= \bar{D}C\bar{B}\bar{A} + \bar{D}CBA + DC\bar{B}\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\ &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB.$$

Primjer:



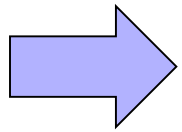
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} se obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** jer su svi njegovi mintermovi obuhvaćeni sa prva dva skupa

■ *Primjer:*

		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	



		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	

bitni skupovi

		CD			
	AB	00	01	11	10
00	1				
01		1			
11	1	1	1		
10			1	1	

nebitni skupovi

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

u obliku **proizvoda logičkih zbirova**

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for the function $F(A, B, C, D)$. The map is labeled with AB (rows) and CD (columns). The values in the cells are: (00,00)=1, (01,00)=1, (11,00)=0, (10,00)=1; (00,01)=0, (01,01)=1, (11,01)=0, (10,01)=0; (00,11)=0, (01,11)=0, (11,11)=0, (10,11)=0; (00,10)=1, (01,10)=1, (11,10)=0, (10,10)=1. Three groups are circled and labeled with numbers 1, 2, and 3. Group 1 is a 2x2 square of 0s in the bottom two rows. Group 2 is a 2x2 square of 1s in the top two rows. Group 3 is a 2x2 square of 1s in the bottom two rows.

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D).$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

- *Rješenje:*

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0			0
	01				
	11	0	0		
	10	0			0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map is labeled with AB on the vertical axis and CD on the horizontal axis. The cells are labeled with 0 or 1. A circled '2' points to the cell (AB=01, CD=11) and a circled '1' points to the cell (AB=10, CD=10). Dashed lines indicate groupings of 0s in the first and last rows, and the two cells in the third row.

$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

- *Primjer:* Pronaći minimalnu formu nekompletno definisane funkcije F , sa tri "bilo što" uslova: $F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 7, 11, 15) + \times (0, 2, 5)$.

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a circle labeled '1' points to the first row (CD=00), and a circle labeled '2' points to the third column (AB=11).

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a circle labeled '1' points to the second column (CD=01), and a circle labeled '2' points to the third column (AB=11).

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a circle labeled '1' points to the third column (AB=11), and a circle labeled '2' points to the first row (CD=00).

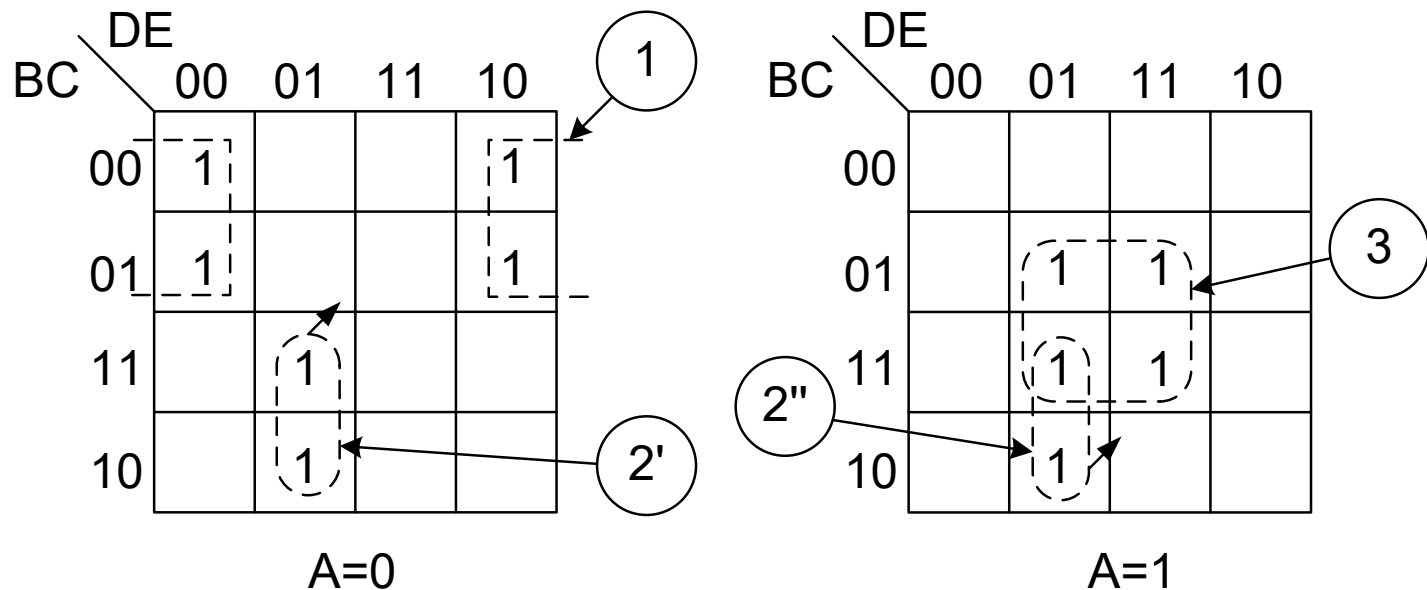
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

■ Karnoove mape sa pet promjenljivih

- *Primjer:* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31).$$

- *Rješenje:*



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}E + ACE$$



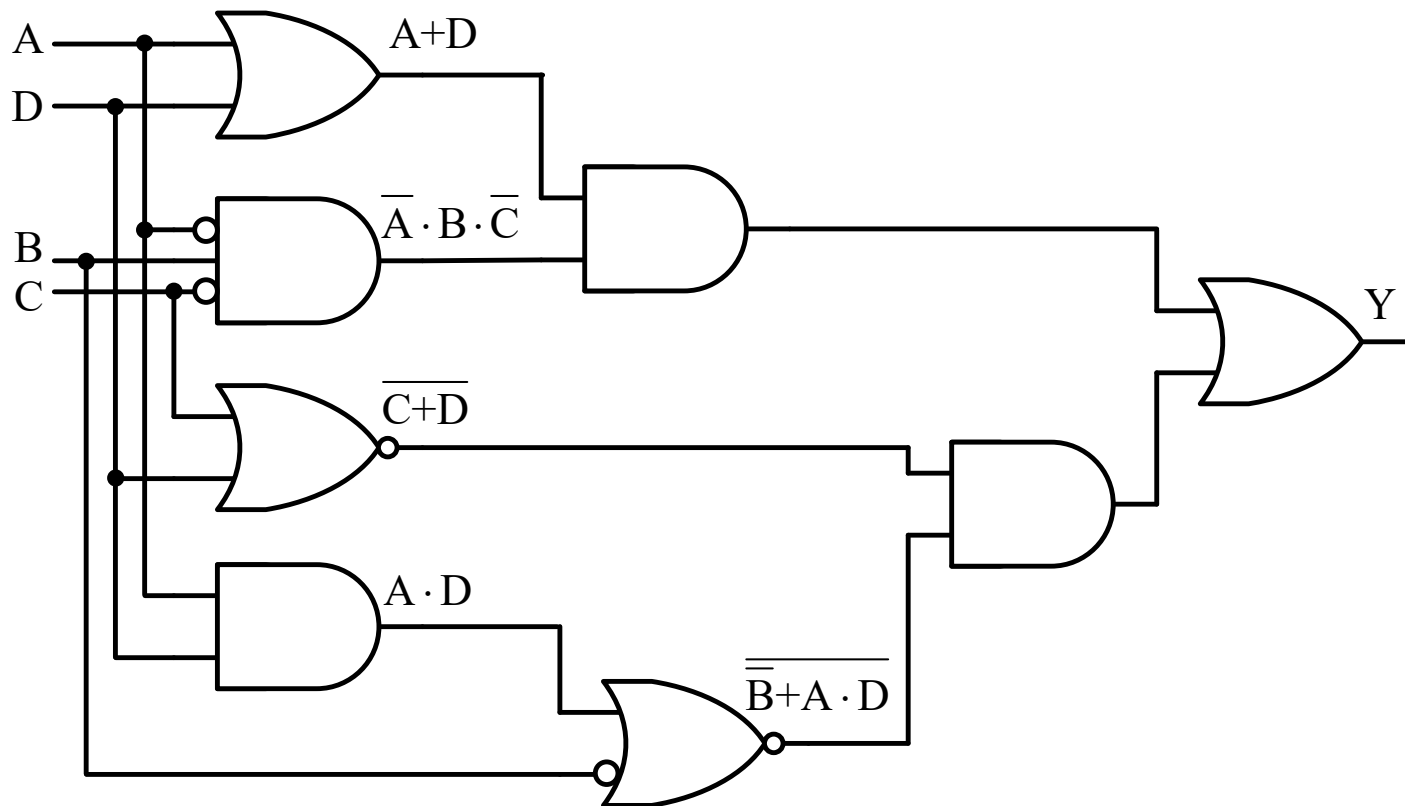
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo sljedeću složenu prekidačku funkciju:

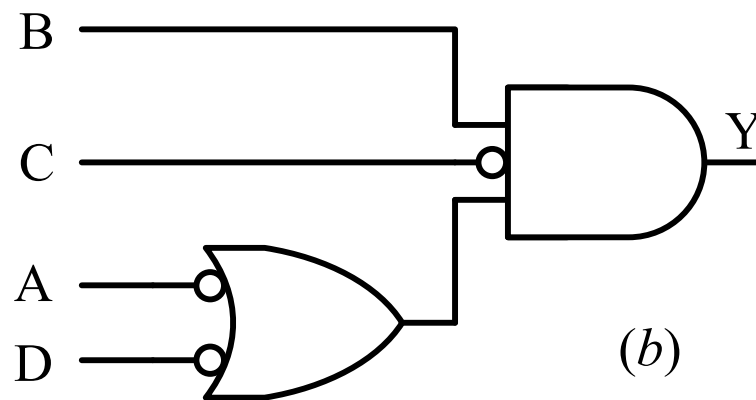
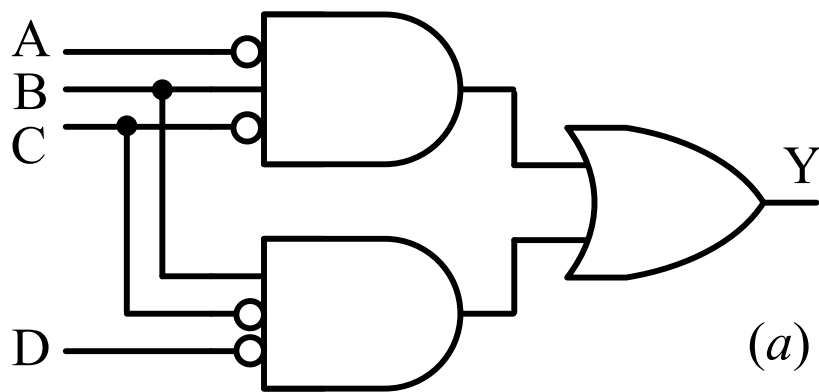
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \bar{B} + A \cdot D$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** prekidačke funkcije u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:



- Izlaz Y iste logičke vrijednosti se veoma često može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (minimizacija algebarski ili pomoću Karnoovih mapa):

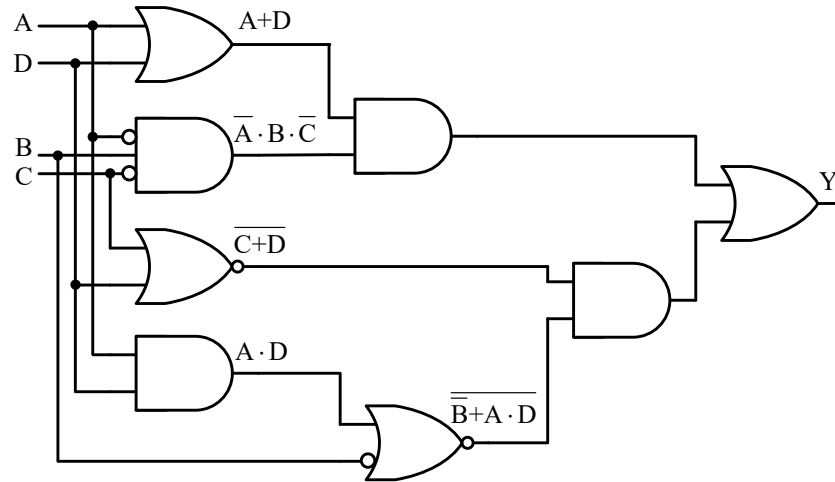
$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D}).$$



- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (**stepeni**) u strukturi mreže

- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim brojem redno vezanih logičkih kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže

- Četvorostepena:



- Dvostepene:

